Exercice 1

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6}, n \in \square \end{cases}$$

1) i/ pour $n = 0$ on a:

$-3 < U_0 = -1 < 1$ Vrai

ii) supposons que : $-3 < U_n < 1$

et montrons que : $-3 < U_{n+1} < 1$

En effet :

$U_n + 6 \geq -3 + 6 = 3 \succ 0$

- $U_{n+1} - 1 = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} - 1 = \dfrac{4U_n + 3 - U_n - 6}{U_n + 6}$

$= \dfrac{3U_n - 3}{U_n + 6} = \dfrac{3(U_n - 1)}{U_n + 6} < 0$ Car $U_n < 1$

- $U_{n+1} + 3 = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} + 3$

$= \dfrac{4U_n + 3 + 3U_n + 18}{U_n + 6}$

$= \dfrac{7U_n + 21}{U_n + 6} = \dfrac{7(U_n + 3)}{U_n + 6} > 0$,car $U_n > -3$

D'où : $-3 < U_{n+1} < 1$

Conclusion :

$\forall n \in \square$: $-3 < U_n < 1$

2) $\forall n \in \square$ on a :

$U_{n+1} - U_n = \dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} - U_n$

$= \dfrac{4U_n + 3 - U_n^2 - 6U_n}{U_n + 6}$

$= \dfrac{-U_n^2 - 2U_n + 3}{U_n + 6}$

Or : $-U_n^2 - 2U_n + 3 = -(U_n - 1)(U_n + 3)$

(Car $a + b + c = 0 \Leftrightarrow U_n = 1$ ou $U_n = -3$)

D'où :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-\overbrace{(U_n - 1)}^{(-)}\overbrace{(U_n + 3)}^{(+)}}{U_n + 6}$$

Alors : $U_{n+1} - U_n \geq 0, \forall n \in \square$

3) soit $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$.

a) $\forall n \in \square$:

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3} = \frac{\dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} - 1}{\dfrac{4U_n + 3}{U_n + 6} + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{4U_n + 3 - U_n - 6}{U_n + 6}}{\dfrac{4U_n + 3 + 3U_n + 18}{U_n + 6}} = \frac{3U_n - 3}{7U_n + 21}$$

$$V_{n+1} = \frac{3(U_n - 1)}{7(U_n + 3)} = \frac{3}{7}\left(\frac{U_n - 1}{U_n + 3}\right)$$

D'où : $\forall n \in \square$: $V_{n+1} = \dfrac{3}{7} V_n$

Par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{3}{7}$

de premier terme : $V_0 = \dfrac{U_0 - 1}{U_0 + 3}$

$\Rightarrow V_0 = \dfrac{-1 - 1}{-1 + 3} = \dfrac{-2}{2} = -1$

Donc : $\boxed{q = \frac{3}{7} et V_0 = -1}$

b) $V_n = V_0 . q^n = (-1) \times \left(\dfrac{3}{7}\right)^n$

D'où $\boxed{V_n = V_0 . q^n = -\left(\dfrac{3}{7}\right)^n, \forall n \in \square}$

On sait que : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 3}$

$\Leftrightarrow (U_n + 3) V_n = Un - 1$

$\Leftrightarrow U_n V_n - U_n = -3V_n - 1$

$\Leftrightarrow U_n (V_n - 1) = -3(V_n - 1)$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{-3(V_n - 1)}{V_n - 1}$

$\Leftrightarrow U_n = \dfrac{3.\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1}{-\left(\frac{3}{7}\right)^n - 1} = \dfrac{1 - 3.\left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{7}\right)^n}$